

Prüfungsprotokoll Theoretische Informatik (Kerngebiet)

- Prüfer: **Prof. Dr. Matthias Jantzen** (Beisitzer: Heiko Rölke)
- Prüfling: Stefan Witt (7. Semester)
- Datum: 26. Oktober 2000 um 13⁰⁰ Uhr im TGI-Besprechungszimmer (15 Min. verspätet)
- Vorbereitung: 11 Wochen
- Note: 1,0
- Veranstaltungen: Modelle für Rechensysteme (bei Prof. Rüdiger Valk im WS 1999/2000)
Übungen zu Modelle für Rechensysteme (bei Mark-Oliver Stehr, Olaf Kummer und Berndt Farwer)
Theoretische Grundlagen der Programmierung (bei Prof. Matthias Jantzen im SoSe 2000)
Übungen zu TGP (bei Prof. Jantzen)
Tutorium Theoretische Informatik (bei Michael Köhler)
- Literatur: Prüfungsgrundlage war das MfR-Buch ohne Kapitel 3 und 7 und das TGP-Skript komplett. Folgende Unterlagen habe ich zur Vorbereitung benutzt:
- ⇒ Skript „Modelle für Rechensysteme“ von Rüdiger Valk (Version von 1999)
 - ⇒ Skript „Theoretische Grundlagen der Programmierung“ von Matthias Jantzen (Version von 2000)
 - ⇒ Folienkopien „Theoretische Grundlagen der Programmierung“ von Matthias Jantzen (Vorlesung 2000):
Sehr hilfreich, um zu wissen, was in der Vorlesung drankam und was nicht! Was nicht drankam, habe ich großzügig übersprungen. Zusätzlich sind hier einige wichtige Ergänzungen zum Skript zu finden.
 - ⇒ Skript „Informatik A3“ von Matthias Jantzen (Version von 1997):
Zur Wiederholung der Grundlagen nochmal gelesen.
 - ⇒ Uwe Schöning: „Theoretische Informatik - kurzgefaßt“ Spektrum Verlag, Berlin 1997:
Auch nochmal der Vollständigkeit halber gelesen, um die Grundlagen zu wiederholen.

Gelernt habe ich mit einem anderen Studenten zusammen: Wir haben uns durchschnittlich zweimal pro Woche getroffen und die Skripte gemeinsam durchgearbeitet. Herausgeschrieben habe ich nichts, also keine Karten oder Ähnliches. Das Theorie-Tutorium brachte schließlich Klarheit über spezielle Fragen und war ansonsten eine schöne Bestätigung, dass ich schon alles gut beherrscht habe.

Die Prüfung verlief nach einem etwas holperigen Start ausgezeichnet. Prof. Jantzen hat sich genau das Gebiet als Einstieg ausgesucht, das ich am schlechtesten beherrschte, aber es hat ja nicht geschadet... Meine Prüfung ist die eindeutige Widerlegung des Gerüchts, dass Jantzen mehr TGP als MfR prüft.

Jantzen erzählt ziemlich ausgiebig, wenn er ein neues Thema einleitet. Das ist zwar manchmal irritierend, weil man ja eigentlich eine Frage erwartet, aber es schindet immerhin Zeit.

Ach ja, und nicht vergessen: Keine Waffen mit in die Prüfung nehmen, darauf weist Prof. Jantzen extra hin!

Matthias Jantzen (MJ.): Wir haben uns mit einigen Modellen von Systemen beschäftigt, unter anderem mit elementaren Wartesystemen. Was ist das, wie kann man sie klassifizieren?

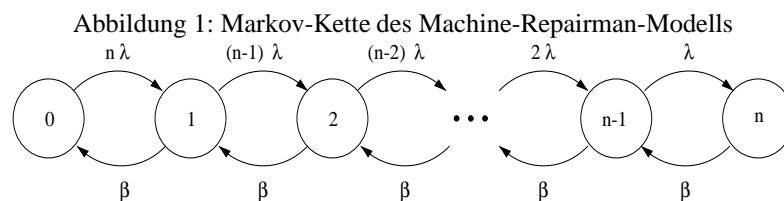
Ich (I.): Elementare Wartesysteme sind Wartesysteme, die aus einer Warteschlange und einer Bedienstation bestehen. Sie werden beschrieben durch den Ankunftsprozess, den Bedienprozess, die Anzahl der Bedieneinheiten (ist immer 1) und die Kapazität, beispielsweise $M/M/1$, also markovscher Ankunfts- und Bedienprozess.

MJ.: Was bedeutet es, wenn der Ankunftsprozess ein Markov-Prozess ist?

I.: Man kann das System dann als Markovkette modellieren, wobei der Zustand in der Kette angibt, wie viele Aufträge aktuell im Wartesystem sind (*dieses habe ich gesagt, obwohl ich wusste, dass das nur genau dann der Fall ist, wenn Ankunfts- und Bedienprozess beide markovsch sind, aber die Frage war so gestellt, dass ich nicht weiß, was ich sonst hätte antworten sollen*).

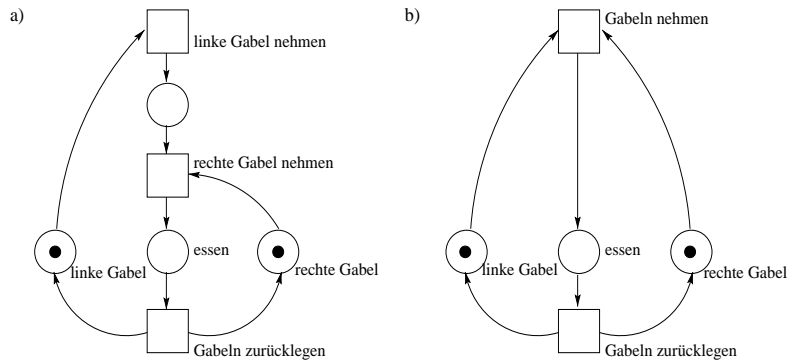
MJ.: Das stimmt so nicht; aber man sagt doch auch, dass der Ankunftsprozess ein Poisson-Prozess ist. Wie passt das denn zum Markov-Prozess?

- I.: Ein Prozess gibt die Ereigniszeitpunkte an. Wenn man ein Zeitintervall betrachtet und fragt, wie viele Ereignisse in diesem Intervall eintreten, erhält man einen Poisson-Prozess. Die Zwischenankunftszeiten bilden einen Markov-Prozess, der zu den Ereigniszeitpunkten erneuert wird.
- MJ.: Genau. Wie hängen Markov-Prozess und negative Exponentialverteilung zusammen?
- I.: Man erhält genau dann eine negative Exponentialverteilung, wenn der Prozess ein Markov-Prozess ist.
- MJ.: Ja, das stimmt! Haben Sie MfR bei mir gehört? Bei Herrn Valk kommt das nicht vor; die stochastischen Petrinetze hat er von mir übernommen. Was für Prozesse für Ankunft und Bedienung gibt es noch?
- I.: Es gibt noch „General“ (G), das steht für eine beliebige Verteilung, und „Deterministisch“ (D) für konstante Zwischenankunftszeiten.
- MJ.: Gut, anderes Thema: Es gibt das „Machine-Repairman-Modell“, das müsste man aber eigentlich mit „e“ schreiben, weil es ja ein ganzes Wartungsteam ist; das wäre bei uns Herr Soltau (*wer?*). Man hat also eine Menge von Geräten, die ausfallen und repariert werden. Wie kann man das modellieren?
- I.: Das läßt sich als Markovkette modellieren. Die Zustände geben die Anzahl der ausgefallenen Geräte an (*Abbildung 1 aufgezeichnet*).



- MJ.: Welche Angaben braucht man für das Modell?
- I.: Die Ausfallrate λ , die Reparaturrate β und die Anzahl der Geräte.
- MJ.: Kann man nun berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Anzahl von Geräten ausgefallen ist?
- I.: Ja, man kann die Schnittbedingungen ansetzen und die Zustandswahrscheinlichkeiten des stationären Grenzprozesses ausrechnen. Das ist möglich, weil der Zustandsraum der Markovkette irreduzibel ist (*exemplarisch habe ich die ersten Gleichungen aufgeschrieben*).
- MJ.: Ja, aber Sie haben jetzt eine Unbekannte mehr als Gleichungen. Also können Sie doch nicht die Zustandswahrscheinlichkeiten berechnen..?
- I.: Doch, denn die Wahrscheinlichkeiten sind auf 1 normiert, d.h. die Summe der Zustandswahrscheinlichkeiten ist 1.
- MJ.: Ja, und dann ist das System lösbar. Wissen Sie zufällig die Ergebnisformel?
- I.: Nein.
- MJ.: Gut, ich weiß sie auch nicht auswendig; es kommt durch das wiederholte Einsetzen eine Fakultät vor. Wir haben ja gerade Mittagszeit, da denke ich ans Essen und die, hmmm, hier im Raum sind wir 4 Personen, naja, 5 Philosophen, die zwischen sich Gabeln liegen haben und einen Spaghettitopf in der Mitte. Wie kann man das modellieren? Wir haben dazu ja ein Petrinetz benutzt.
- I.: Das kann man, wie Sie sagen, mit einem Petrinetz modellieren (*verfeinerte Variante wie in Abbildung 2a aufgezeichnet und erklärt*).
- MJ.: Da kann es ja zu einer Verklemmung kommen, wenn alle Philosophen in eine Richtung greifen. Wie kann man die verhindern?
- I.: Man könnte die Symmetrie brechen, indem eben nicht alle in die gleiche Richtung greifen, um die erste Gabel aufzunehmen.
- MJ.: Naja, aber welche Möglichkeit gibt es denn noch?
- I.: Man könnte das Aufnehmen der beiden Gabeln als atomare Handlung modellieren (*Abbildung 2b gezeichnet*).
- MJ.: Aber dann können doch immer noch Philosophen verhungern.
- I.: Ja, denn das Netz ist nicht fair.
- MJ.: Ja, jetzt kommen wir also zu den Begriffen Fairness und Lebendigkeit. Was ist das?
- I.: Fairness ist so definiert: $\forall m \in \mathbb{R}(N) \forall t \in T \forall w \in T^\omega : m \xrightarrow{w} \Rightarrow |w|_t = \infty$; bei Lebendigkeit steht da entsprechend $\exists w \in T^\omega$.

Abbildung 2: Dinierende Philosophen, Petrinetz für *einen* Philosophen: a) verfeinertes Netz mit getrenntem Aufnehmen der Gabeln, b) vergrößerte Version



MJ.: (*Überlegt*) Ja, ich benutze bloß immer die andere Definition für Lebendigkeit. Wie sieht es denn aus, wenn wir einen endlichen Erreichbarkeitsgraphen haben: Ist dann die Lebendigkeit entscheidbar?

I.: Ja, die ist entscheidbar.

MJ.: Was ist aber das Problem dabei? Wie schnell kann der Erreichbarkeitsgraph mit der Netzgröße wachsen?

I.: Es gibt eine Folge von Netzen, deren Größe linear zunimmt, aber deren Erreichbarkeitsgraph schneller wächst als jede primitiv rekursive Funktion, also exponentiell.

MJ.: Das stimmt so nicht, das können Sie so nicht sagen.

I.: Aber im Skript steht doch...

MJ.: Der Anfang von dem, was Sie sagten, war ja richtig, aber die Zunahme ist mehr als exponentiell.

Exponentialfunktionen sind primitiv rekursiv; es wäre ein Sahnestück, wenn der Erreichbarkeitsgraph nur exponentiell zunehmen würde. Wie sieht es aus, wenn der Erreichbarkeitsgraph unendlich groß ist: Ist die Erreichbarkeit dann auch entscheidbar?

I.: Ja, sie ist entscheidbar; wir hatten das Verfahren aber nicht kennen gelernt.

MJ.: Stimmt. Ist Fairness entscheidbar? Ach ja, das hatten wir nicht, das hatten wir nicht. Die ist unentscheidbar, es kann ja nicht alles entscheidbar sein. Und wie sieht es mit Lebendigkeit aus?

I.: Die ist entscheidbar. Wir hatten in der Vorlesung bewiesen, dass das Lebendigkeitsproblem äquivalent zum Erreichbarkeitsproblem ist.

MJ.: Richtig. Was sind Stelleninvarianten?

I.: Stelleninvarianten sind Vektoren $\vec{i} \in \mathbb{Z}^{|S|} \setminus \{\vec{0}\}$, die Lösungen der Gleichung $\Delta^T \cdot \vec{i} = \vec{0}$ sind. Δ ist die Wirkungsmatrix, die für jede Transition angibt, wie viele Marken sie in jede Stelle legt oder aus ihr entfernt.

MJ.: Und was sind Transitionsinvarianten?

I.: T-Invarianten sind Vektoren $\vec{j} \in \mathbb{N}^{|S|} \setminus \{\vec{0}\}$, die Lösungen der Gleichung $\Delta \cdot \vec{j} = \vec{0}$ sind.

MJ.: Sie nehmen \mathbb{N} ohne die Null? Ach nein, Sie nehmen den Nullvektor aus, ok, das ist sinnvoll. Mit welcher Komplexität kann man die Invarianten berechnen?

I.: Das Lösen der Gleichungen ist eigentlich \mathcal{NP} -vollständig, aber es gibt andere Verfahren, um die Invarianten in Polynomzeit zu bestimmen.

MJ.: Nein, das stimmt nicht. Mit \mathcal{NP} -Vollständigkeit kommen Sie in Teufels Küche. Die Stelleninvarianten können Sie mit dem Gaußverfahren in Polynomzeit bestimmen; wenn ein Bruch auftritt, multipliziert man einfach mit dem Hauptnenner. Das Finden von T-Invarianten ist \mathcal{NP} -vollständig, weil die Lösungen nicht aus \mathbb{Z} , sondern aus \mathbb{N} stammen müssen. Jetzt haben wir aber recht lange diskutiert, dies soll aber eine Prüfung sein. Muss man die Invarianten eines Netzes immer hinterher bestimmen?

I.: Nein, bei der Netzkonstruktion will man ja, dass das Netz von vorneherein bestimmte Eigenschaften hat. Man geht also von Invarianten aus und konstruiert daraus das Netz.

MJ.: Ja, das sehe ich auch so. Die Petrinetz-Tools gehen ja genau so vor. Anderes Thema: Wir haben ja Kommunikationsnetze kennen gelernt. Was sind das?

I.: Kommunikationsnetze sind Graphen, deren Knoten Registermaschinen und deren Kanten die Kommunikationskanäle zwischen ihnen darstellen.

MJ.: Und was für Netze modelliert man damit? Sind das Rechnernetze oder die globale Vernetzung?

I.: Nein, sie sind Modelle für parallele Rechner, bei denen die Prozessoren Daten untereinander austauschen.

- MJ.: Was für Kommunikationsnetze kennen Sie?
- I.: Hypercube, Perfect Shuffle (=de Bruijn-Graph), Shuffle-Exchange-Graph, Butterfly-Netze, Cube-connected Cycle und die nicht regelmäßigen Netze wie lineares Array usw.
- MJ.: Ja, und sowas wie Ringnetze. Wie sieht ein Shuffle-Exchange-Graph aus?
- I.: Die Knotenmenge ist $V = \{0, 1\}^n$, die Kantenmenge ist $E = \{(v_n \dots v_2 v_1, v_n \dots v_2 \bar{v}_1), (v_n \dots v_1, v_{n-1} \dots v_1 v_n)\}$, also Exchange- und Shuffle-Kanten.
- MJ.: Ja, und es ist bei dieser Notation sogar egal, ob der Graph gerichtet oder ungerichtet ist (*er erklärt das noch ausführlich; ich bin davon aber nicht so ganz überzeugt, habe ihm aber zugestimmt*). Ist der Graph nun gut oder nicht?
- I.: Es gibt verschiedene Maße für Kommunikationsnetzwerke: Grad, Durchmesser (max. Abstand zwischen 2 Knoten) und Bisektionsweite (Anzahl Kanten, die man entfernen muss, damit 2 Teilgraphen mit der gleichen Knotenzahl entstehen).
- MJ.: Wie sieht die Bisektionsweite für einen Shuffle-Exchange-Graphen aus?
- I.: Die Bisektionsweite ist in der Größenordnung von $\frac{2^n}{n}$.
- MJ.: Ist das nun gut?
- I.: Ja, die Bisektionsweite ist ein Maß für den Datendurchsatz.
- MJ.: Ist sie besser als beim Hypercube?
- I.: Der Hypercube hat eine Bisektionsweite von 2^{n-1} . . .
- MJ.: . . . also $\frac{2^n}{2}$, also ist sie beim Shuffle-Exchange-Graphen etwas schlechter. Wie sieht es mit dem Grad aus? Und der Durchmesser?
- I.: Beim Shuffle-Exchange-Network ist der Grad 2, der Durchmesser müsste $2n$ sein (von Knoten $0 \dots 0$ nach $1 \dots 1$ braucht man n Invertierungen und n Shifts).
- MJ.: Naja, für den Durchmesser müsste man sich den Graphen noch genauer ansehen; es gibt kürzere Wege im Graphen (*später fiel mir ein, dass dieses wohl nicht stimmt, weil der Durchmesser ja den längsten Weg zwischen 2 Knoten angibt*).
- Kommen wir nochmal zur Entscheidbarkeit: David Hilbert hatte auf einem Mathematik-Kongress in Paris um 1900, ich glaube 1903, 10 Probleme aufgestellt (*ich habe kurz überlegt, ob ich ihn korrigieren sollte, weil es 1900 war und es 23 Probleme waren, habe mich aber dagegen entschieden*). Was ist das 10. Hilbertsche Problem?
- I.: Gegeben ist ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Gefragt ist, ob das Polynom Nullstellen hat (also $p(x_1, \dots, x_n) = 0$ lösbar ist).
- MJ.: Ja, aber können es beliebige Nullstellen sein?
- I.: Ähhh, es müssen ganzzahlige Lösungen sein, ansonsten könnte man ja wunderbar den Fundamentalsatz der Algebra benutzen (*Anmerkung: Ein kritischer Kommilitone wies mich darauf hin, dass der Fundamentalsatz hier nicht hilft, weil selbiger nur für Polynome mit einer Variablen gilt. Es wundert mich, dass Prof. Jantzen mich an dieser Stelle nicht gebremst hat!*).
- MJ.: Und was ist nun mit diesem Problem?
- I.: Es ist unentscheidbar!
- MJ.: Genau. Es ist eine diophantische Gleichung. Welchen Zusammenhang gibt es da zu rekursiv aufzählbaren Mengen und Turingmaschinen? Sie haben doch bei mir TGP gehört!
- I.: Eine Menge ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn sie diophantisch ist.
- MJ.: Genau. Das ist eine erstaunliche Eigenschaft der rekursiv aufzählbaren Mengen. Man kann also jede beliebige rekursiv aufzählbare Menge durch eine diophantische Relation beschreiben.
- I.: Tja, zum Beispiel gibt es da ja das diophantische Primzahlpolynom, das die Menge der Primzahlen beschreibt.
- MJ.: Ja, das habe ich in der Vorlesung erwähnt, weil ich es so lustig finde: Da kommen wirklich alle Buchstaben vor, die man so kennt.
- Das genügt mir, wir müssen ja nicht überziehen, auch wenn ich mich mit Ihnen gerne weiter unterhalten würde . . .